



Teoría 2

Lógica

Resolución de Problemas y Algoritmos

Ingeniería en Computación (TU y TFA)

Profesorado en Ciencias de la Computación (TU y TFA)





Teoría 2: Lógica

- ✓ Lenguaje natural versus Lenguaje simbólico.
- ✓ Lógica proposicional.
- ✓ Proposiciones simples y compuestas.
- ✓ Conectivos lógicos.
- ✓ Tabla de verdad.
- ✓ Clasificación de fórmulas.
- ✓ Jerarquía de los conectivos.
- ✓ Equivalencias lógicas.

Lenguaje Natural vs Lenguaje Formal



Lenguaje Natural

Es muy rico en vocabulario, pero **redundante** y **ambiguo** por su relación entre la interpretación del sistema Emisor-Receptor y el referente del mensaje. Ejemplo: Español e Inglés.

Lenguaje Formal

Sirve para formular conocimientos. Es un lenguaje especializado. Ejemplo: Lenguaje Lógico y Matemático.



Lenguaje Natural

- ¡Ven a verme!
- ¿Hace calor?
- Ya rendí la materia y la aprobé.
- Te espero en el banco.



Lenguaje Formal

- $3+5=8$
- $E \vee (A \wedge I)$
- $\int_{-3}^2 x^2 dx$



Lenguaje Formal o simbólico

En matemática, lógica y ciencias de la computación, es un lenguaje cuyos **símbolos primitivos** y **reglas** para unir esos símbolos están totalmente especificados.

Al conjunto de **símbolos primitivos** se llama **alfabeto** del lenguaje.

Ejemplo: $\{1, 0\}$ $\{V, F\}$ $\{\text{VERDADERO, FALSO}\}$

Al conjunto de **reglas** se llama **sintaxis**.





¿Por qué necesitamos saber lenguaje lógico?

Recordemos:

- ¿Quién va a ingresar datos e instrucciones a la computadora?
- ¿Quién va a interpretar la información resultante del procesamiento de datos?

Las **Unidades Aritméticas Lógicas** que están en la **Unidad Central de Procesamiento** de las computadoras pueden realizar las siguientes operaciones:

- Operaciones aritméticas de números enteros (adición, sustracción, y a veces multiplicación y división, aunque esto es más complejo).
- Operación lógica de bits (AND, NOT, OR, XOR, XNOR).

Lógica proposicional



La **lógica proposicional** o **lógica de orden cero** es la rama de la lógica matemática que estudia **proposiciones**, los métodos de vincularlas mediante **conectores lógicos** y las relaciones y propiedades que se derivan de esos procedimientos.

Una **proposición** es una frase que afirma o cuenta algo, sobre lo que podemos decir que es cierto o no lo es.

Las proposiciones usan la función **informativa del lenguaje** (también llamada **descriptiva, enunciativa o aseverativa**).

Proposiciones



Es necesario poder evaluarlas como **verdadera o falsa** (1 o 0).

Imperativa	¡Ven a verme!	Le damos una orden o instrucción a otra persona.
Exclamativa	¡Viva la libertad!	Expresa una emoción o un deseo.
Interrogativa	¿Está lloviendo?	Solicitamos información sobre un evento o situación.
Informativa	El trabajo es simple.	Transmitimos información o conocimiento que puede ser verdadero o falso.

Solo la función INFORMATIVA corresponde a una proposición.

Proposiciones



Solo la función informativa corresponde a una proposición.

Según nuestro criterio, ¿cuál es **VERDADERA** y cuál es **FALSA**?

- La Tierra es plana.
- Hoy está lloviendo en San Luis.
- La UNSL está en San Luis.
- Argentina ganó el último mundial.
- Los perros tienen cuatro patas.

- Las células eucariotas tienen pared celular.
- El transistor más pequeño del mundo mide 14mm.
- Argentina ganó el mundial en 1934.
- Raúl es uno de los mejores estudiantes de la clase.

Proposición



¿Qué diferencia veo entre las proposiciones de la Tabla 1 y la Tabla 2?

Tabla 1

Hoy llueve en San Luis.

Yo usaré un paraguas.

Tabla 2

Si hoy llueve en San Luis, entonces yo usaré un paraguas.

Hoy no llueve en San Luis.

En conclusión

Para que una expresión o enunciado sea **proposición simple o elemental** debe:

- 1) Ser una frase (sin conectores/sujeto y predicado).
- 2) Ser una frase informativa (declarativa o aseverativa).
- 3) Tener un valor de verdad, es decir, ser o bien verdadera o bien falsa.

Ejemplo:

La tierra gira alrededor del sol.

Actividad 1:

¿Las siguientes frases son **proposición simple**? SI/NO.
Justificar su respuesta.

- A. No es cierto que el sol gira alrededor de la tierra.
- B. ¿Es cierto que el tierra gira alrededor del sol?

Proposiciones compuestas



- **frase Simple:** un sujeto + un predicado.

El número 6 es mayor que el 3.

- **frase Compuesta:** se conforman a partir de las frases simples unidas por **elementos gramaticales** que las **asocian combinan o modifican.**

Pensemos el siguiente ejemplo:

El número 6 es mayor que el 3 y menor que el 8.

Hay dos partes bien demarcadas.

¿Cuál es el elemento gramatical que asocia cada parte?

Proposiciones compuestas



El número 6 es mayor que el 3, además es menor que el 8.

Si analizamos la frase, veremos que no cambia el significado con respecto a la anterior, aunque tiene una diferencia en su redacción.

El número 6 es mayor que el 3 **y menor que el 8.**

En el lenguaje natural los elementos gramaticales o conectivas pueden tomar diversas formas.

Proposiciones compuestas



Pensemos ahora la siguiente frase:

Apruebo el parcial 1 y el parcial 2, o debo recuperar.

Como primer paso, intentemos buscar las conectivas que hay en dicha frase, e identifiquemos las afirmaciones por partes.

Apruebo el parcial 1 y el parcial 2, o debo recuperar.

P= Yo apruebo el parcial 1.

Q= Yo apruebo el parcial 2.

R= Yo debo recuperar.

En conclusión

Para que una expresión lingüística sea **proposición compuesta** debe:

1. estar formada a su vez por otras proposiciones compuestas, o por proposiciones simples,
2. unidas por conectivos o conectores (elementos gramaticales de las frases).

Ejemplo:

Si llueve, entonces se mojan las calles.

Hoy no es domingo.

Si estudio, puedo o no aprobar el examen; pero si no estudio seguro que no aprobaré el examen.

Conectivos lógicos



En **lógica proposicional** vamos a:

- Denominar:

Enunciados o proposiciones a las frases.

Conectivos o conectores a los **elementos gramaticales** que unen frases.

¿Cómo los vamos a representar simbólicamente?

Letras mayúsculas para representar los **Enunciados o proposiciones**. Por ejemplo: P, Q, M..

Símbolos para representar los **Conectivos**. Por ejemplo: \Leftrightarrow \Rightarrow \vee
 \wedge \neg .

Otras expresiones lingüísticas que pueden tomar las conectivas:

Conectiva	Expresión en lenguaje natural
\neg	No P Es falso que P
\wedge	P y Q P porque Q P pero Q Ambos, P y Q P , además de Q
\vee	P o Q Bien P o Q P a menos que Q Al menos P o Q P , o Q o ambos

Otras expresiones lingüísticas que pueden tomar las conectivas:

Conectiva	Expresión en lenguaje natural
\Rightarrow	<p>Si P, Q Si P entonces Q P suficiente para Q P sólo si Q</p> <p>Q si P Q necesario para P</p>
\Leftrightarrow	<p>P si y sólo si Q P si y solamente si Q P únicamente si Q P necesario y suficiente para Q</p>
\oplus	<p>o P o Q P o Q, pero no ambos o bien P, o bien Q</p>

NEGACIÓN

\neg

Se podría decir que es una conectiva particular o especial, puesto que en lugar de relacionar dos enunciados, afecta solamente al enunciado al cual se encuentra asociado. **Conectivo unario.**

Dado P enunciado, su negación es $\neg P$.

Ejemplo:

P= Yo iré a verte mañana.

$\neg P$ = Yo **NO** iré a verte mañana.

Nos valemos de la siguiente tabla de posibles valores, denominada **Tabla de Verdad.**

P	$\neg P$
V	F
F	V

CONJUNCIÓN

\wedge

Si se tiene un enunciado compuesto A conformado por dos enunciados, supongamos P y Q, unidos por medio del conectivo conjunción (\wedge), el enunciado A tomará valores de verdad verdadero **solamente cuando ambos enunciados** que la componen son verdaderos.

La siguiente tabla muestra el comportamiento de la **conectiva conjunción**.

$$A = P \wedge Q$$

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo:

A= El número 6 es mayor que el 3, además es menor que el 8.

P= El número 6 es mayor que el 3.

Q= El número 6 es menor que el 8.

Y se representa por:

$$A = (P \wedge Q)$$

DISYUNCIÓN

∨

Si se tiene un enunciado compuesto A conformado por dos enunciados, supongamos P y Q, unidos por medio del conectivo disyunción (\vee), el enunciado A tomará valores de verdad falso solamente cuando **ambos enunciados** que la componen son **falsos**.

La siguiente tabla muestra el comportamiento de la conectiva disyunción.

$$A = P \vee Q$$

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo:

A= Voy a estudiar música o voy a inscribirme en Ingeniería.

P= Yo voy a estudiar música.

Q= Yo voy a inscribirme en Ingeniería.

Y se representa por:

$$A = P \vee Q$$

Algunas **expresiones lingüísticas (en lenguaje natural)** que pueden tomar las conectivas:

Conjunción	y, también, además, adicionalmente, en adición, ahora, incluso, inclusive, así mismo, de igual forma, del mismo modo, igualmente, sin embargo, no obstante, pero, aun así, tanto como, al igual que, por otra parte, más, así mismo, "por otro lado".
Disyunción	o, "tal vez ..., tal vez ...", de pronto, de pronto también, aunque de pronto, puede, aunque puede.
Negación	no, no es cierto que, no es verdad que, ni (también indica conjunción).

CONDICIONAL o IMPLICACIÓN

\Rightarrow

Si se tiene un **enunciado compuesto A** conformado por dos enunciados, supongamos P y Q, unidos por medio del conectivo condicional (\Rightarrow), el enunciado A tomará valores de verdad falso solamente cuando el **antecedente** es **verdadero** y el **consecuente** es **falso**.

Si **ANTECEDENTE** entonces **CONSECUENTE**.

La siguiente tabla muestra el comportamiento de la **conectiva condicional**.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplo:

Consecuente

Antecedente

A= El seguro pagará **si** se produce un incendio.

P= El seguro pagará.

Q= Se produce un incendio.

$$A = Q \Rightarrow P$$

A = **Si** tengo hambre, entonces cocino.

Actividad 2:

P = ¿?

Q = ¿?

¿Antecedente y consecuente?

¿Fórmula simbólica?

BICONDICIONAL o DOBLE IMPLICACIÓN

\Leftrightarrow

Los componentes del conectivo bicondicional (\Leftrightarrow) reciben el nombre de **componente izquierdo y componente derecho**.

Como su nombre lo indica, el bicondicional es un condicional doble.

B sí y sólo sí C.

$(\mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{C})$ equivale al condicional $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C}$ y a $\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{B}$ por lo que el bicondicional resulta equivalente al esquema $((\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C}) \wedge (\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{B}))$.

La siguiente tabla muestra el comportamiento de la conectiva bicondicional.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

DISYUNCIÓN EXCLUYENTE

v

\oplus

Si se tiene un enunciado compuesto A conformado por dos enunciados, supongamos P y Q, unidos por medio del conectivo disyunción exclusiva (\oplus), el enunciado A tomará valores de verdad verdadero solamente cuando solo uno de los enunciados que lo componen sea verdadero.

P	Q	$(P \underline{\vee} Q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplos:

A= Apruebo la materia **si y solo si** apruebo los dos parciales.

P= Yo Apruebo la materia.

Q= Yo apruebo los dos parciales.

$$P \Leftrightarrow Q$$

A= **O** Argentina está en América **o**, está en Europa.

P= Argentina está en América.

Q= Argentina está en Europa.

$$P \underline{\vee} Q$$

A= Apruebo la materia **si y solo si** apruebo los dos parciales.

P= Yo Apruebo la materia.

Q= Yo apruebo los dos parciales.

$$P \Leftrightarrow Q$$

A= Apruebo la materia **si y solo si** apruebo el parcial 1 **y** apruebo el parcial 2.

P= Yo Apruebo la materia.

Q= Yo apruebo el parcial 1.

R= Yo apruebo el parcial 2.

$$P \Leftrightarrow Q \wedge R$$

¿Cuál se evalúa primero?

¿La conectiva de conjunción o la bicondicional?

Jerarquía de conectivas

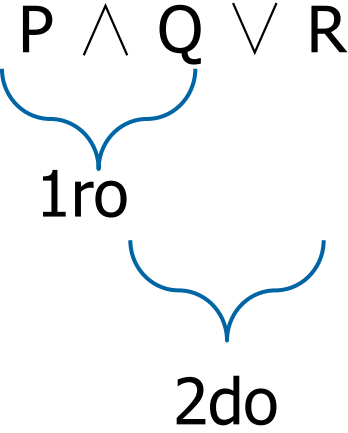


Como se estableció anteriormente, para determinar el valor de verdad de una proposición compuesta, es necesario conocer cuáles son las **reglas** que se aplican para determinar si la proposición completa es **verdadera** o **falsa**.

Asimismo, al tener fórmulas con dos o más conectivas, se deben conocer las reglas de precedencia y asociatividad de las conectivas para asegurar que la evaluación es correcta.

$$\neg, \wedge, \vee, \oplus, \Rightarrow, \Leftrightarrow$$

\neg (negación) es el conectivo con **mayor jerarquía** en la secuencia y \Leftrightarrow (bicondicional) es el conectivo con el **menor peso**.



¿Qué se utiliza para cambiar la precedencia?

Dada la siguiente fórmula:

$$\neg P \vee Q \wedge R$$

El orden de evaluación es primero $\neg P$, posteriormente $Q \wedge R$ y finalmente se aplica \vee al resultado de ambas evaluaciones.

Agregando paréntesis sería: $((\neg P) \vee (Q \wedge R))$

Ejemplo:

- El orden de evaluación de $P \vee Q \vee R$ es $((P \vee Q) \vee R)$.
- El orden de evaluación de $\neg(P \vee Q)$ es primero $P \vee Q$ y luego la negación.

A= Si no estudio y no practico, entonces no aprobaré o tendré que rendir nuevamente.

E= Yo estudio.

P= Yo practico.

R= Yo aprobaré.

A= Yo ¿?

$$\neg E \wedge \neg P \rightarrow \neg R \vee A$$

A= Si no estudio y no practico, entonces no aprobaré o tendré que rendir nuevamente.

E= Yo estudio.

P= Yo practico.

R= Yo aprobaré.

A= Yo ¿?

$$\neg E \wedge \neg P \rightarrow \neg R \vee A$$

Actividad 3:

Escribir la proposición A.

¿Cuál es el orden de evaluación? Agregue paréntesis según el orden en que se evalúa cada conector en la fórmula.

Fórmula bien formada (fbf)



Una **fbf solo puede contener símbolos** del siguiente conjunto:

1. Letras mayúsculas que representan variables proposicionales.
2. Los conectivos lógicos (en nuestro caso: \neg , \wedge , \vee , \Rightarrow , \Leftrightarrow , \oplus).
3. Los paréntesis izquierdo y derecho: ().

Las siguientes reglas permiten construir una **fbf**:

1. Una variable proposicional es una fbf, también llamada **fórmula atómica**.
2. Si P es una fbf, $\neg P$ también es una fbf.
3. Si P y Q son fbf, $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \oplus Q)$, $(P \Rightarrow Q)$ y $(P \Leftrightarrow Q)$ son fbf.
4. Todas las fórmulas bien formadas se obtienen aplicando las reglas 1, 2 y 3.

Tablas de verdad



Una **interpretación** de una fórmula es una asignación de valores de verdad a un conjunto de proposiciones simples.

Para una fórmula con **2 proposiciones simples** se tienen **4 posibles interpretaciones**, para una con 3 se tienen 8 interpretaciones, y en general:

N proposiciones simples = **2^N** interpretaciones (filas de la tabla).

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$	$P \oplus Q$
VERDADERO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO
VERDADERO	FALSO	FALSO	FALSO	VERDADERO	FALSO	FALSO	VERDADERO
FALSO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO
FALSO	FALSO	VERDADERO	FALSO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO

Clasificación de fórmulas



De la evaluación de una fórmula (con tabla de verdad), se puede determinar si una fbf es:

Tautología: si es **verdadera para todas** sus posibles interpretaciones. Una tautología también se conoce como una fórmula válida.

Contradicción: si es **falsa para todas** sus posibles interpretaciones. Una contradicción también se conoce como una fórmula inconsistente.

Consistente: Una fbf que tiene **al menos una interpretación verdadera**.

Contingencia: Una fbf es una contingencia si tiene **al menos una interpretación verdadera** y **al menos una interpretación falso**.

Actividad 4:

Completar la tabla con SI/NO si cumple cada clasificación

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

tautología	
contradicción	
consistente	
contingente	

Equivalencias lógicas



Al evaluar las fórmulas $(P \Rightarrow Q)$ y $(\neg P \vee Q)$ con la tabla de verdad se observa que todas sus interpretaciones son iguales, por lo que se dice que ambas fórmulas son **lógicamente equivalentes**.

P	Q	$\neg P$	$(P \Rightarrow Q)$	$(\neg P \vee Q)$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$$

Usaremos el símbolo \equiv para significar lógicamente equivalente

Existen varias equivalencias entre fórmulas de la lógica proposicional, las cuales se conocen como leyes de equivalencia.

Aplicando estas leyes también es posible encontrar **fbf lógicamente equivalentes**. Es decir, sin usar las tablas de verdad.

$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$ $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$	Ley de De Morgan
$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$ $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$	Absorción
$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	Conmutativa
$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$	Asociativa
$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	Distributiva

Existen varias equivalencias entre fórmulas de la lógica proposicional, las cuales se conocen como leyes de equivalencia.

Aplicando estas leyes también es posible encontrar **fbf lógicamente equivalentes**. Es decir, sin usar las tablas de verdad.

$P \Leftrightarrow Q \equiv \neg(P \oplus Q)$
$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
$P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$
$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
$P \vee Q \equiv \neg P \Rightarrow Q$
$P \wedge Q \equiv \neg(P \Rightarrow \neg Q)$



Teoría 2

Lógica

- ✓ Lenguaje natural versus Lenguaje simbólico.
- ✓ Lógica proposicional.
- ✓ Proposiciones simples y compuestas.
- ✓ Conectivos lógicos.
- ✓ Tabla de verdad.
- ✓ Clasificación de fórmulas.
- ✓ Jerarquía de los conectivos.
- ✓ Equivalencias lógicas.

Teoría 2

Lógica



¡Ya podemos comenzar con el
Práctico 2!