



# Teoría 2

## Lógica

### Resolución de Problemas y Algoritmos

Ingeniería en Computación

Ingeniería Informática

Profesorado en Ciencias de la Computación





## Teoría 2: Lógica

- ✓ Lenguaje natural versus Lenguaje simbólico.
- ✓ Lógica proposicional versus lógica de predicado.
- ✓ Propositiones simples y compuestas.
- ✓ Conectivos lógicos.
- ✓ Tabla de verdad.
- ✓ Clasificación de fórmulas.
- ✓ Jerarquía de los conectivos.
- ✓ Equivalencias lógicas.

# Lenguaje Natural vs Lenguaje Formal

---



## Lenguaje Natural

Es muy rico, pero **redundante** y **ambiguo** por su relación entre la interpretación del sistema Emisor-Receptor y el referente del mensaje.  
Ejemplo: Español e Inglés.

## Lenguaje Formal

Sirve para formular conocimientos. Es un lenguaje especializado.  
Ejemplo: Lenguaje Lógico y Matemático.



# Lenguaje Natural

- ¡Ven a verme!
- ¿Hace calor?
- Ya rendí la materia y la aprobé.
- Te espero en el banco.



# Lenguaje Formal

- $3+5=8$
- $E \vee (A \wedge I)$
- $\int_{-3}^2 x^2 dx$



# Lenguaje Formal o simbólico

En matemática, lógica y ciencias de la computación, es un lenguaje cuyos **símbolos primitivos** y **reglas** para unir esos símbolos están totalmente especificados.

Al conjunto de **símbolos primitivos** se llama **alfabeto** del lenguaje.

Ejemplo:  $\{1, 0\}$   $\{V, F\}$   $\{\text{VERDADERO, FALSO}\}$

Al conjunto de **reglas** se llama **sintaxis**.



# Lógica

---



La **lógica proposicional** o **lógica de orden cero** es la rama de la lógica matemática que estudia **proposiciones**, los métodos de vincularlas mediante **conectores lógicos** y las relaciones y propiedades que se derivan de esos procedimientos.

La **lógica de predicado** o **lógica de primer orden** va a permitir formalizar oraciones que hablan sobre **individuos**, sobre las **propiedades de esos individuos**, y sobre como esos individuos se relacionan entre sí.

La lógica de primer orden engloba a la lógica de orden cero. Es decir, que todo lo que se puede formalizar con lógica proposicional se puede formalizar en lógica de predicados, pero no al revés.

## Ejemplos en **lógica proposicional** o **lógica de orden cero**

P= Yo apruebo el parcial 1.

Q= Yo apruebo el parcial 2.

Yo apruebo el parcial 1 y apruebo el parcial 2.

$P \wedge Q$

## Ejemplos en **lógica de predicado** o **lógica de primer**

Todos los hombres son mortales

$H(x) = x$  es hombre

$M(x) = x$  es mortal

$\forall x, H(x) \rightarrow M(x)$

Algunas niñas son rubias

$N(x) = x$  es niña

$R(x) = x$  es rubia

$\exists x : N(x) \wedge R(x)$



## ¿Por qué necesitamos saber lenguaje lógico?

Recordemos:

- ¿Quién va a ingresar datos e instrucciones a la computadora?
- ¿Quién va a interpretar la información resultante del procesamiento de datos?

La mayoría de las **ALU** (en la **CPU** de las computadoras) pueden realizar las siguientes operaciones:

- Operaciones aritméticas de números enteros (adición, sustracción, y a veces multiplicación y división, aunque esto es más complejo).
- Operación lógica de bits (AND, NOT, OR, XOR, XNOR).

# Lógica proposicional

---



La **lógica proposicional** o **lógica de orden cero** es la rama de la lógica matemática que estudia **proposiciones**, los métodos de vincularlas mediante **conectores lógicos** y las relaciones y propiedades que se derivan de esos procedimientos.

Una **proposición** es una frase que afirma o cuenta algo, sobre lo que podemos decir que es cierto o no lo es.

Las proposiciones usan la función **informativa del lenguaje** (también llamada **descriptiva, enunciativa o aseverativa**).

# Proposiciones



Es necesario poder evaluarlas como **verdadera o falsa** (1 o 0).

<b>Imperativa</b>	¡Ven a verme!	Le damos una orden o instrucción a otra persona.
<b>Exclamativa</b>	¡Viva la libertad!	Expresa una emoción o un deseo.
<b>Interrogativa</b>	¿Está lloviendo?	Solicitamos información sobre un evento o situación.
<b>Informativa</b>	El trabajo es simple.	Transmitimos información o conocimiento que puede ser verdadero o falso.

**Solo la función INFORMATIVA corresponde a una proposición.**

# Proposiciones

---



**Solo la función informativa corresponde a una proposición.**

Según nuestro criterio, ¿cuál es **VERDADERA** y cuál es **FALSA**?

- La Tierra es plana.
  - Hoy está lloviendo en San Luis.
  - La UNSL está en San Luis.
  - Argentina ganó el último mundial.
  - Los perros tienen cuatro patas.
- 
- Las células eucariotas tienen pared celular.
  - El transistor más pequeño del mundo mide 14mm.
  - Argentina ganó el mundial en 1934.
  - Raúl es uno de los mejores estudiantes de la clase.

# Proposición simple

---



**Qué diferencia observo en las 2 proposiciones?**

La Tierra es plana y el sol gira alrededor de la Tierra.

# En conclusión

Para que una expresión o enunciado sea **proposición simple** debe:

- 1) Ser una frase.
- 2) Ser una frase informativa (declarativa o aseverativa).
- 3) Tener un valor de verdad, es decir, ser o bien verdadera o bien falsa.

Ejemplo:

La tierra gira alrededor del sol.

**Actividad 1:** ¿También es una **proposición simple** la frase?

“No es cierto que el sol gira alrededor de la tierra.”

# Proposiciones compuestas

---



- **frase Simple**: un sujeto + un predicado.

El número 6 es mayor que el 3.

- **frase Compuesta**: se conforman a partir de las frases simples unidas por **elementos gramaticales** que las asocian.

Pensemos el siguiente ejemplo:

**El número 6 es mayor que el 3 y menor que el 8.**

Hay dos partes bien demarcadas.

¿Cuál es el elemento gramatical que asocia cada parte?

# Proposiciones compuestas

---



**El número 6 es mayor que el 3, además es menor que el 8.**

Si analizamos la frase, veremos que no cambia el significado con respecto a la anterior, aunque tiene una diferencia en su redacción.

**El número 6 es mayor que el 3 y menor que el 8.**

En el lenguaje natural los elementos gramaticales o conectivas pueden tomar diversas formas.

# Proposiciones compuestas

---



Pensemos ahora la siguiente frase:

**Apruebo el parcial 1 y el parcial 2, o debo recuperar.**

Como primer paso, intentemos buscar las conectivas que hay en dicha frase, e identifiquemos las afirmaciones por partes.

**Apruebo el parcial 1 y el parcial 2, o debo recuperar.**

P= Yo apruebo el parcial 1.

Q= Yo apruebo el parcial 2.

R= Yo debo recuperar.

# En conclusión

Para que una expresión lingüística sea **proposición compuesta** debe:

1. estar formada a su vez por otras proposiciones compuestas, o por proposiciones simples,
2. unidas por conectivos o conectores (elementos gramaticales de las frases).

Ejemplo:

Si llueve, entonces se mojarán las calles.

Hoy no es domingo.

Si estudio, puedo o no aprobar el examen; pero si no estudio seguro que no aprobaré el examen.

# Conectivos lógicos

---



En **lógica proposicional** vamos a:

- Denominar:

**Enunciados o proposiciones** a las frases.

**Conectivos o conectores** a los **elementos gramaticales** que unen frases.

**¿Cómo los vamos a representar simbólicamente?**

**Letras mayúsculas** para representar los **Enunciados o proposiciones**. Por ejemplo: P, Q, M..

**Símbolos** para representar los **Conectivos**. Por ejemplo:  $\Leftrightarrow$   $\Rightarrow$   $\vee$   
 $\wedge$   $\neg$ .

# Otras expresiones lingüísticas que pueden tomar las conectivas:

$\neg$ No p Es falso que p	$p \Rightarrow q$ si P entonces Q q si p si p, q p suficiente para q q necesario para p no p a menos que q p sólo si q
$p \wedge q$ : p y q p porque q p pero q Ambos, p y q p, sin embargo q p, además de q	$p \iff q$ : p si y sólo si q p necesario y suficiente para q p si y solamente si q p únicamente q
$p \vee q$ : p o q bien p o q p a menos que q p o q o ambos al menos p o q	$p \oplus q$ : o p o q p o q, pero no ambos o bien p, o bien q

# NEGACIÓN

$\neg$

Se podría decir que es una conectiva particular o especial, puesto que en lugar de relacionar dos enunciados, afecta solamente al enunciado al cual se encuentra asociado. **Conectivo unario.**

Dado P enunciado, su negación es  $\neg P$ .

## Ejemplo:

**P**= Yo iré a verte mañana.

**$\neg P$** = Yo **NO** iré a verte mañana.

Nos valemos de la siguiente tabla de posibles valores, denominada **Tabla de Verdad.**

P	$\neg P$
V	F
F	V

# CONJUNCIÓN

$\wedge$

Si se tiene un enunciado compuesto A conformado por dos enunciados, supongamos P y Q, unidos por medio del conectivo conjunción ( $\wedge$ ), el enunciado A tomará valores de verdad verdadero **solamente cuando ambos enunciados** que la componen son verdaderos.

La siguiente tabla muestra el comportamiento de la **conectiva conjunción**.

$$A = P \wedge Q$$

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo:

**A**= El número 6 es mayor que el 3, además es menor que el 8.

**P**= El número 6 es mayor que el 3.

**Q**= El número 6 es menor que el 8.

Y se representa por:

$$A = (P \wedge Q)$$

# DISYUNCIÓN

$\vee$

Si se tiene un enunciado compuesto A conformado por dos enunciados, supongamos P y Q, unidos por medio del conectivo disyunción ( $\vee$ ), el enunciado A tomará valores de verdad falso solamente cuando **ambos enunciados** que la componen son **falsos**.

La siguiente tabla muestra el comportamiento de la conectiva disyunción.

$$A = P \vee Q$$

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo:

**A**= Voy a estudiar música o voy a inscribirme en Ingeniería.

**P**= Yo voy a estudiar música.

**Q**= Yo voy a inscribirme en Ingeniería.

Y se representa por:

$$A = P \vee Q$$

Algunas expresiones lingüísticas (en lenguaje natural) que pueden tomar las conectivas:

<b>Conjunción</b>	y, también, además, adicionalmente, en adición, ahora, incluso, inclusive, así mismo, de igual forma, del mismo modo, igualmente, sin embargo, no obstante, pero, aun así, tanto como, al igual que, por otra parte, más, así mismo, "por otro lado".
<b>Disyunción</b>	o, "tal vez ..., tal vez ...", de pronto, de pronto también, aunque de pronto, puede, aunque puede.
<b>Negación</b>	no, no es cierto que, no es verdad que, ni (también indica conjunción).

# CONDICIONAL

$\Rightarrow$

Si se tiene un enunciado compuesto A conformado por dos enunciados, supongamos P y Q, unidos por medio del conectivo condicional ( $\Rightarrow$ ), el enunciado A tomará valores de verdad falso solamente cuando el **antecedente** es **verdadero** y el **consecuente** es **falso**.

Si **ANTECEDENTE** entonces **CONSECUENTE**.

La siguiente tabla muestra el comportamiento de la **conectiva condicional**.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V



# BICONDICIONAL



Los componentes del conectivo bicondicional ( $\Leftrightarrow$ ) reciben el nombre de **componente izquierdo** y **componente derecho**.

Como su nombre lo indica, el bicondicional es un condicional doble.

**B sí y sólo sí C.**

$(\mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{C})$  equivale al condicional  $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C}$  y a  $\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{B}$  por lo que el bicondicional resulta equivalente al esquema  $((\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C}) \wedge (\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{B}))$ .

La siguiente tabla muestra el comportamiento de la conectiva bicondicional.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

# DISYUNCIÓN EXCLUSIVA

V

$\oplus$

Si se tiene un enunciado compuesto A conformado por dos enunciados, supongamos P y Q, unidos por medio del conectivo disyunción ( $\oplus$ ) exclusiva, el enunciado A tomará valores de verdad verdadero **solamente cuando solo uno de los enunciados** que lo componen sea verdadero.

P	Q	$(P \underline{\vee} Q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplos:

**A**= Apruebo la materia **si y solo si** apruebo los dos parciales.

**P**= Yo Apruebo la materia.

**Q**= Yo apruebo los dos parciales.

$$P \Leftrightarrow Q$$

**A**= **O** Argentina está en América **o**, está en Europa.

**P**= Argentina está en América.

**Q**= Argentina está en Europa.

$$P \underline{\vee} Q$$

**A**= Apruebo la materia **si y solo si** apruebo los dos parciales.

**P**= Yo Apruebo la materia.

**Q**= Yo apruebo los dos parciales.

$$P \Leftrightarrow Q$$

**A**= Apruebo la materia **si y solo si** apruebo el parcial 1 **y** apruebo el parcial 2.

**P**= Yo Apruebo la materia.

**Q**= Yo apruebo el parcial 1.

**R**= Yo apruebo el parcial 2.

$$P \Leftrightarrow Q \wedge R$$

**¿Cuál se evalúa primero?**

**¿La conectiva de conjunción o la bicondicional?**

# Jerarquía de conectivas

---

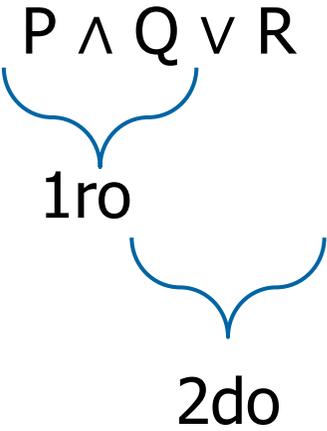


Como se estableció anteriormente, para determinar el valor de verdad de una proposición compuesta, es necesario conocer cuáles son las **reglas** que se aplican para determinar si la proposición completa es **verdadera** o **falsa**.

Asimismo, al tener fórmulas con dos o más conectivas, se deben conocer las reglas de precedencia y asociatividad de las conectivas para asegurar que la evaluación es correcta.

$$\neg, \wedge, \vee, \oplus, \Rightarrow, \Leftrightarrow$$

$\neg$  (negacion) es el conector con **mayor jerarquía** en la secuencia y  $\Leftrightarrow$  (bicondicional) es el conector con el **menor peso**.



**¿Qué se utiliza para cambiar la precedencia?**

**A**= Apruebo la materia **si y solo si** apruebo el parcial 1 **y** apruebo el parcial 2.

**P**= Yo Apruebo la materia.

**Q**= Yo apruebo el parcial 1.

**R**= Yo apruebo el parcial 2.

$$P \Leftrightarrow Q \wedge R$$

**Actividad 3: ¿Cuál se evalúa primero?**

**¿La conectiva de conjunción o la bicondicional?**

Dada la siguiente fórmula:

$$\neg P \vee Q \wedge R$$

El orden de evaluación es primero  $\neg P$ , posteriormente  $Q \wedge R$  y finalmente se aplica  $\vee$  al resultado de ambas evaluaciones.

Agregando paréntesis sería:  $( (\neg P) \vee (Q \wedge R) )$

Ejemplo:

- El orden de evaluación de  $P \vee Q \vee R$  es  $((P \vee Q) \vee R)$ .
- El orden de evaluación de  $\neg(P \vee Q)$  es primero  $P \vee Q$  y luego la negación.

# Fórmula bien formada (fbf)

---



Una **fbf solo puede contener símbolos** del siguiente conjunto:

1. Letras mayúsculas que representen variables proposicionales.
2. Los conectivos lógicos (en nuestro caso:  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$ ,  $\oplus$ ).
3. Los paréntesis izquierdo y derecho: ( ).

Las siguientes reglas permiten construir una **fbf**:

1. Una variable proposicional es una fbf, también llamada **fórmula atómica**.
2. Si P es una fbf,  $\neg P$  también es una fbf.
3. Si P y Q son fbf,  $(P \wedge Q)$ ,  $(P \vee Q)$ ,  $(P \oplus Q)$ ,  $(P \Rightarrow Q)$  y  $(P \Leftrightarrow Q)$  son fbf.
4. Todas las fórmulas bien formadas se obtienen aplicando las reglas 1, 2 y 3.

# Tablas de verdad



Una **interpretación** de una fórmula es una asignación de valores de verdad a un conjunto de proposiciones simples.

Para una fórmula con 2 proposiciones simples se tienen 4 posibles interpretaciones, para una con 3 se tienen 8 interpretaciones, y en general:

**N** proposiciones simples =  $2^N$  interpretaciones (filas de la tabla).

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$	$P \oplus Q$
VERDADERO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO
VERDADERO	FALSO	FALSO	FALSO	VERDADERO	FALSO	FALSO	VERDADERO
FALSO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO
FALSO	FALSO	VERDADERO	FALSO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO

# Clasificación de fórmulas

---



De la evaluación de una fórmula (con tabla de verdad), se puede determinar si una fbf es:

**Tautología:** si es **verdadera para todas** sus posibles interpretaciones. Una tautología también se conoce como una fórmula válida.

**Contradicción:** si es **falsa para todas** sus posibles interpretaciones. Una contradicción también se conoce como una fórmula inconsistente o una fórmula insatisfactible.

**Consistente:** Una fbf que tiene **al menos una interpretación verdadera** se conoce como una fórmula consistente o satisfactible.

**Contingencia:** Una fbf es una contingencia si tiene **al menos una interpretación verdadera** y **al menos una interpretación falso**.

#### Actividad 4:

Completar la tabla con SI/NO si cumple cada una

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

<b>tautología</b>	
<b>contradicción</b>	
<b>consistente</b>	
<b>contingente</b>	

# Equivalencias lógicas



Al evaluar las fórmulas  $(P \Rightarrow Q)$  y  $(\neg P \vee Q)$  con la tabla de verdad se observa que todas sus interpretaciones son iguales, por lo que se dice que ambas fórmulas son **lógicamente equivalentes**.

P	Q	$\neg P$	$(P \Rightarrow Q)$	$(\neg P \vee Q)$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$$

Existen varias equivalencias entre fórmulas de la lógica proposicional, las cuales se conocen como leyes de equivalencia.

Aplicando estas leyes también es posible encontrar **fbf lógicamente equivalentes**. Es decir, sin usar las tablas de verdad.

$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$ $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$	<b>Ley de De Morgan</b>
$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$ $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$	<b>Absorción</b>
$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	<b>Conmutativa</b>
$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$	<b>Asociativa</b>
$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	<b>Distributiva</b>

- $P \iff Q$  es equivalente a:  $\neg(P \nabla Q)$
- $P \Rightarrow Q$  es equivalente a:  $\neg P \vee Q$
- $P \Rightarrow Q$  es equivalente a:  $\neg Q \Rightarrow \neg P$
- $P \iff Q$  es equivalente a:  $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
- $P \vee Q$  es equivalente a:  $\neg P \Rightarrow Q$
- $P \wedge Q$  es equivalente a:  $\neg(P \Rightarrow \neg Q)$



# Teoría 2

## Lógica

- ✓ Lenguaje natural versus Lenguaje simbólico.
- ✓ Lógica proposicional versus lógica de predicado.
- ✓ Proposiciones simples y compuestas.
- ✓ Conectivos lógicos.
- ✓ Tabla de verdad.
- ✓ Clasificación de fórmulas.
- ✓ Jerarquía de los conectivos.
- ✓ Equivalencias lógicas.



# Teoría 2

## Lógica

¡Ya podemos comenzar con el  
Práctico 2!