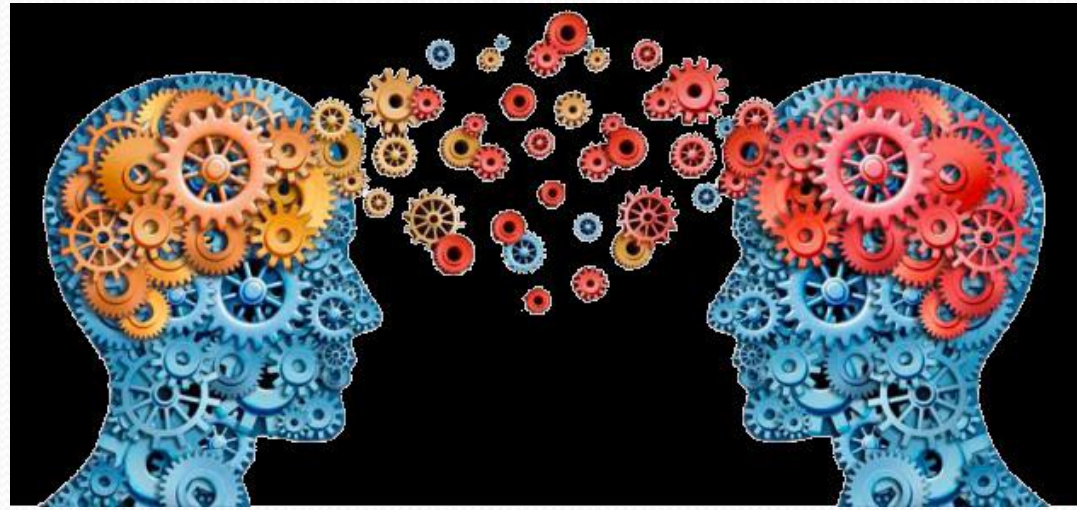
Teoría Nº 2

Lógica Proposicional



"Las interpretaciones respectivas de los símbolos 0 y 1 en el sistema de la lógica son **Nada** y **Universo**" George Boole

Fundamentos de la Informática
Int. a la Programación
Setundo Cuatrimestre 2024

Lenguaje Natural vs Lenguaje Formalizado

Leng. Natural: Es muy rico, **redundante** y **ambiguo** por su relación intrínseca entre la interpretación del sistema emisor-receptor y el referente del mensaje. Ej. Español, Inglés.

Leng. Formalizado: Sirve para formular conocimientos. Es un lenguaje especializado. Ej. Leng. Lógico y matemático.

Lenguaje Natural: la lógica de los conceptos

¿Cómo nos expresamos los seres humanos?

Conceptos

- Vagos
- Concretos
- Abstractos
- Imperfectos
- Complejos
- Simples

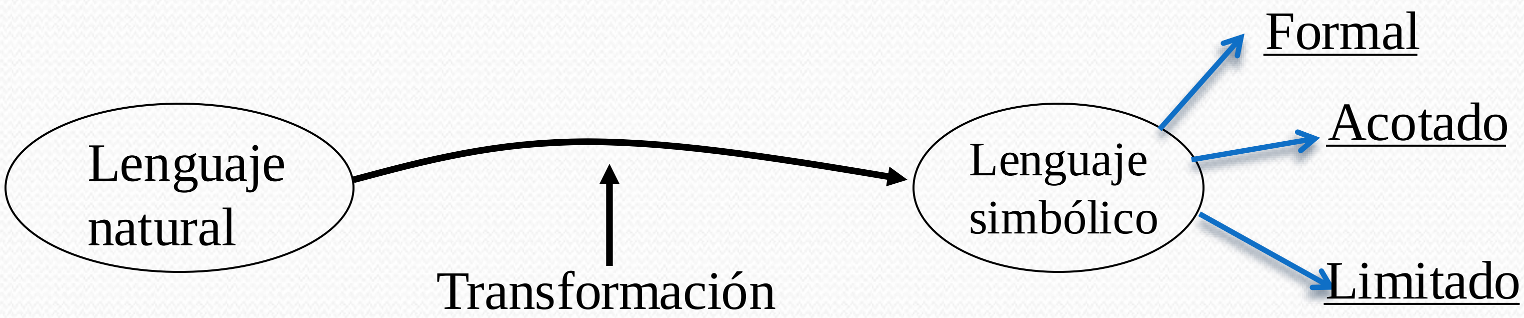
El lenguaje natural es muy rico, redundante e involucra procesos intelectuales subjetivos.

Para poder enunciar juicios y razonar sobre el mundo y la realidad una de las herramientas es la Lógica Formal.

Introducción

La **lógica** es la ciencia formal, tanto en la rama de la Filosofía como de la Matemática, que estudia los principios de la demostración y la inferencia válida, las falacias, las paradojas y la noción de verdad.

Es necesario entonces



Lógica Formal

La ***Lógica Formal*** es la ciencia del razonamiento formalmente válido

Se encarga de las ***formas*** y de las ***leyes generales*** del razonamiento humano

Estudia los <u>principios</u> y <u>métodos</u> a través de los cuales es posible determinar la <u>validez</u> de argumentos, desde el punto de vista solamente de su <u>estructura</u>, sin tomar en cuenta el <u>contenido semántico</u> de las expresiones de los argumentos.

Lógica Formal

Introducción

Existen en la realidad un número considerable de problemas con los que una persona se enfrenta y de los cuales se deben ***deducir*** ciertos datos para poder resolverlos.

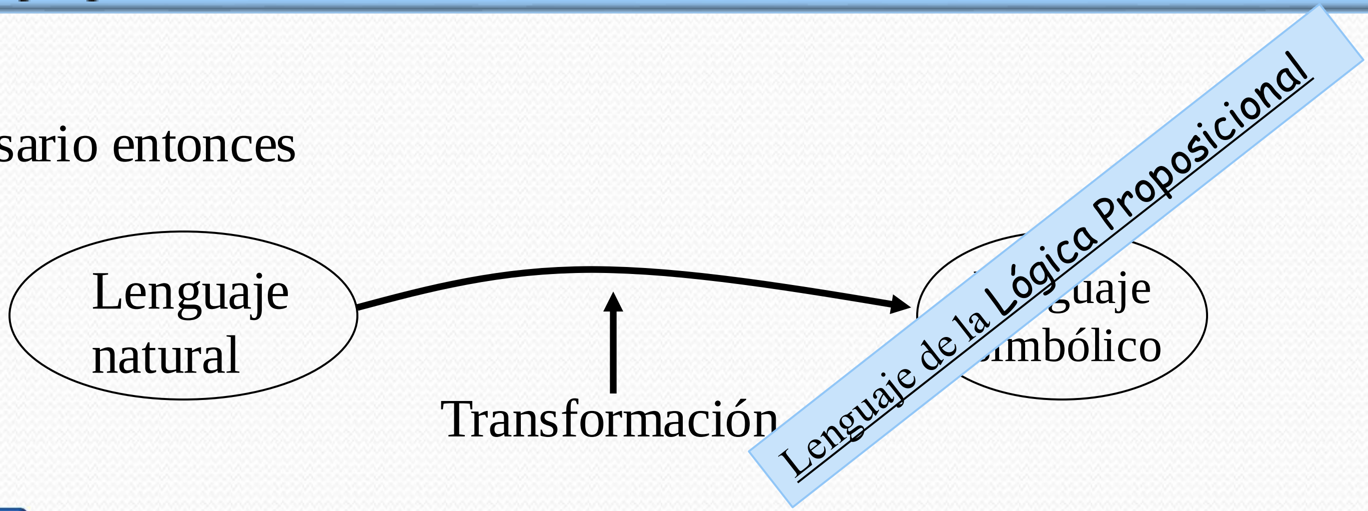
Una deducción, razonamiento o inferencia, es un tipo de pensamiento que se basa en la generación de conocimiento nuevo (la conclusión) a partir de un conocimiento existente (las premisas)

Lógica Formal

Si bien la forma en que las personas aplican el poder deductivo es muy personal, éste podría ser encausado o guiado a través del uso de ***reglas de deducción***.

Es necesario que dichas reglas sean establecidas y usadas con una cierta ***precisión*** de modo que puedan ser reutilizadas.

Es necesario entonces



Lenguaje Natural: Frases y Conjunciones

Si se desea deducir información a partir de nuestro lenguaje cotidiano formado de frases o expresiones, es necesario poder evaluarlas como *verdadera o falsa* (aunque no todas pueden ser evaluadas).

Ejemplos:

Frases categorizables	**Frases No categorizables**
Eduardo es un número racional	¡Auxilio!
El cocodrilo es un mamífero	¿Qué hora es?
El doble de 3 es 5	Andate
Si Pablo no atiende en clase o no estudia en casa, fracasará en los exámenes	Sea en hora buena

Resumiendo: Toda frase o expresión que tiene una función de tipo informativa es categorizable.

Proposiciones

La ***proposición*** es una oración aseverativa de la que tiene sentido decir si es **verdadera** o **falsa**

Todas las proposiciones son enunciados pero no todos los enunciados son proposiciones

Ejemplos

Dolly fue la primera oveja clonada

El átomo es una molécula

Son proposiciones

Proposiciones

La ***proposición*** es una oración aseverativa de la que tiene sentido decir si es **verdadera** o **falsa**

Todas las proposiciones son enunciados pero no todos los enunciados son proposiciones

Ejemplos

Quizas llueva mañana
Debemos honrar a nuestros héroes
Valentín es bueno

No Son proposiciones

Proposiciones

La ***proposición*** es una oración aseverativa de la que tiene sentido decir si es **verdadera** o **falsa**

Toda proposición es una expresión aseverativa pero no toda expresión aseverativa es una proposición

<u>Ejemplos</u>

X+3 = 5

"A" es la capital del Perú

Son proposiciones abiertas

En Lógica proposicional trabajaremos con proposiciones cerradas

Proposiciones

Toda proposición es una expresión aseverativa pero no toda expresión aseverativa es una proposición

<u>En conclusión</u>

Para que una expresión lingüística sea proposición debe cumplir con lo siguiente:

1) Ser oración
2) Ser oración aseverativa
3) Ser oración aseverativa cerrada
4) Ser o bien verdadera o bien falsa

La misma información se puede transmitir a través de diferentes construcciones gramaticales.

Ejemplo:

1- *Socrates es hombre entonces es mortal.*

2- *Si Socrates es hombre, mortal es.*

3- *Socrates es hombre.*
Socrates es mortal.

4- *Socrates es mortal porque todos los hombres son mortales.*

En los casos 2, 3 y 4 se podría llegar a deducir lo mismo que en el caso 1 haciendo uso de reglas gramaticales y del significado por nosotros conocido asociado a las palabras.

La diferencia se encuentra en la manera en que se construye la frase.

Gramaticalmente las frases se pueden distinguir:

- **Frases Simples**: constan de un sujeto y un predicado.

- **Frases Compuestas**: se conforman a partir de las frases simples unidas por elementos gramaticales (conjunciones) que las asocian.

Para poder transmitir una misma información por medio de diferentes frases, se tratará de expresar una idea a través de:

- una única frase (simple o compuesta).
- el uso de construcciones gramaticales semejantes.

¿Como poder transmitir información haciendo uso de construcciones independientemente del significado por nosotros conocido asociado a las palabras?

Mediante el uso de un Lenguaje Simbólico

Lógica Formal

1. Los snark son bojum
2. Rufus es un snark
3. Por tanto, Rufus es bojum.

- Desde el punto de vista de su estructura este argumento es válido.

- El significado de los elementos que intervienen no es tomado en cuenta

Lógica Formal

1- *Argentina está en África o Argentina está en Asia*.

2- *Argentina no está en Asia*

3- En consecuencia, *Argentina está en África*.

El argumento es válido desde el punto de vista lógico, aún cuando sabemos que la **conclusión es falsa**.

- La lógica proposicional no verifica el significado de las premisas.

Debido a lo anterior es necesario distinguir entre proposiciones verdaderas y proposiciones lógicamente verdaderas.

Las primeras son verdaderas independientemente de su estructura, mientras que las segundas no lo son.

Leng. Simbólico: Enunciados y Conectivas

Medidas para formalizar un lenguaje:

1. Restringir el lenguaje a frases categorizables.
2. Adoptar una nueva terminología. Esto es, llamar:
   - A las frases: *enunciados* o *proposiciones*.
   - A los elementos gramaticales que unen frases simples: *conectivos*.
3. Adoptar una representación simbólica :
   - Para representar los proposiciones: *letras mayúsculas*.
   - Para representar los conectivos: símbolos tales como $\wedge$ $\neg$ $\vee$ $\oplus$ $\Rightarrow$ $\Leftrightarrow$.

Una vez que un enunciado del lenguaje natural se representa por medio de la simbología asociada tenemos una *estructura* o *esqueleto lógico* que nos va a permitir realizar nuestras deducciones. Es decir la *forma* que tiene dicho enunciado.

Leng. Formal: Formas Enunciativas

Desde el punto de vista simbólico, es necesario poder lograr deducir información solamente a través de *la forma de los enunciados*.

Formas enunciativas: *es la forma en que se va a formular una idea de modo que ésta exprese siempre lo que se desea.*

Generalizando:

- Dados **P**, **Q**, **R** enunciados (proposiciones), se los denomina *variables de enunciado o variables proposicionales*.
- Dado **P** variable de enunciado, este adquiere valor de: *verdadero* o *falso*.
- Dados P y Q enunciados, la ligadura de ambas a través de un conectivo es también un enunciado (*enunciado compuesto*).
- Dados P y Q enunciados simples (verdaderos o falsos), la ligadura de P con Q, será también verdadero o falso y sus valores surgen a partir de los valores de las formas enunciativas que las componen.

Lógica Proposicional

La construcción de enunciados compuestos requiere del uso de elementos que permitan establecer una *relación* entre los enunciados que la componen; estos elementos se conocen como *conectivas lógicas*.

Así mismo es necesario poder determinar si un enunciado es Verdadero o Falso.

La Lógica Proposicional establece las reglas de interpretación de enunciados a través de *Tablas de verdad*, y cuáles serán las conectivas lógicas básicas a ser usadas junto con su representación simbólica.

Conectiva	Símbolos asociados
Negación (No)	$\sim$, $\neg$, -
Conjunción (Y)	&, *, $\wedge$
Disyunción (O)	$\vee$, +
Condicional (Si ... entonces)	$\Rightarrow$
Bicondicional (Si y solo si)	$\Leftrightarrow$
Disyunción Excluyente	$\oplus$ $\veebar$

Tabla 1: Conectivas lógicas

Formas Enunciativas Compuestas y Tablas de Verdad

Las formas enunciativas compuestas se forman a partir de enunciados simples o proposiciones, unidos por conectivos.

Ejemplo:

P: “*EL es un artículo* *y* *DE es una preposición*”

Conectivo Logico

Donde si:

A: EL es un artículo

B: DE es una preposición

se representa por

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$$

Resta entonces analizar cada una de los conectivos para poder evaluar como verdadero o falso un enunciado compuesto.

Conectivas lógicas: Negación

Se podría decir que es una conectiva particular o especial puesto que en lugar de relacionar dos enunciados, afecta solamente al enunciado al cual se encuentra asociado.

Dado P enunciado, su negación es $\neg$P .

Ejemplo:

P: Iré a verte mañana. $\neg$ **P**: NO Iré a verte mañana.

¿Cuál es el comportamiento del conectivo $\neg$?

Esto es, ¿cómo se evalúa $\neg$P? (¿verdadero o falso?).

Nos valemos de la siguiente tabla de posibles valores, denominada ***Tabla de Verdad***.

P	**¬P**
V	F
F	V

Tabla 2: Conectiva negación

Conectivas lógicas: Conjunción

Si se tiene un enunciado compuesto P conformado por dos enunciados, supongamos A y B, unidos por medio del conectivo $\wedge$, el enunciado P tomará valores de verdad verdadero **solamente cuando ambos enunciados** que la componen son verdaderos.

La siguiente tabla muestra el comportamiento de la conectiva conjunción.

A	B	(A $\wedge$ B)
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla 3: Conectiva conjunción

Ejemplo de Conjunción

Haciendo la asociación con nuestro lenguaje natural, la conectiva de conjunción está representada usualmente por la palabra ´**y**´ .

Ejemplo:

P: "Silvia es alta pero tiene mala postura "

donde:

A: "Silvia es alta"
B: "Silvia tiene mala postura"

y se representa por:

$$(A \wedge B)$$

Ejemplo de Conjunción

Haciendo la asociación con nuestro lenguaje natural, la conectiva de conjunción esta representada usualmente por la palabra ´**y**´ .

Ejemplo:

P: “El aviador tuvo dificultades pero logró aterrizar a salvo”

donde:

A: “El aviador tuvo dificultades”
B: “El aviador logró aterrizar a salvo”

y se representa por:

$$(A \wedge B)$$

Ejemplo

a) Arturo y Bernardo están enfermos

Proposiciones: P: Arturo está enfermo Q: Bernardo está enfermo

Forma Lógica: **$(P \wedge Q)$**

b) Amalia y Juan son vecinos

¿Proposiciones? P: Juan es vecino Q: Amalia es vecina **NO**

P: Juan es vecino de Amalia

NO

Q: Amalia es vecina de Juan

P: Amalia y Juan son vecinos

Forma Lógica: **(P)**

Proposiciones atómicas relacionales

Las **pseudoproposiciones conjuntivas** son proposiciones que se presentan como si fuesen proposiciones conjuntivas, pero en realidad son proposiciones atómicas relacionales. La ‘y’, de los ejemplos, tiene carácter de **término relacional** y no propiamente de conjunción copulativa o conectiva.

Ejemplo

- ✓ Juan y Pedro son mellizos
- ✓ Sansón y Dalila comparten sus ganancias

Ejemplo de Conjunción

Ejemplo:

P: "Ni vi la película ni leí la novela"

donde:

A: "Yo vi la película"
B: "Yo leí la novela"

y se representa por:

$$(\neg A \wedge \neg B)$$

Más Ejemplos

Ejemplo:

P: "*No es cierto que viese la película y leyese la novela* "

¿Enunciados?

¿Expresión en símbolos?

Ejemplo:

P: "*Vallejo fue escritor, poeta y revolucionario*"

¿Enunciados?

¿Expresión en símbolos?

Conectivas lógicas: Disyunción

Si se tiene un enunciado compuesto P conformado por dos enunciados, supongamos A y B, unidos por medio del conectivo de disyunción (∨), el enunciado P tomará valores de verdad verdadero solamente cuando **al menos uno de los enunciados** que lo componen sea verdadero, con lo cual, si ambas son verdaderas ya se da por cumplida la condición establecida por el conectivo.

La siguiente tabla muestra el comportamiento de la conectiva disyunción.

A	B	(A ∨ B)
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 4: Conectiva disyunción

Ejemplo de Disyunción

Haciendo la asociación con nuestro lenguaje natural, la conectiva de disyunción esta representada <u>usualmente</u> por la palabra ´**o**´ .

Ejemplo:

P: “Iré al cine o comeré pororó”

donde:

A: “Yo Iré al cine”
B: “Yo comeré pororó”

y se representa por:

$$(A \vee B)$$

Ejemplo de Disyunción

Haciendo la asociación con nuestro lenguaje natural, la conectiva de disyunción esta representada <u>usualmente</u> por la palabra ´**o**´ .

Ejemplo:

P: "Rosario es nombre de mujer o es nombre de hombre"

donde:

A: "Rosario es mujer"
B: "Rosario es hombre"

y se representa por:

$$(A \vee B)$$

Más Ejemplos

P: “*Los peruanos o los ecuatorianos son pacifistas o buscan el desarrollo*”

¿Enunciados?

¿Expresión en símbolos?

Conectivas lógicas: Condicional

Existe en nuestro lenguaje cotidiano la posibilidad de armar frases compuestas de tipo condicional, es decir, enunciados condicionales que llevan implícito una implicación material o condición material entre dos enunciados simples.

Estos enunciados suelen expresarse por medio del conectivo '**si .... entonces**' que relaciona dos proposiciones; la que se encuentra detrás de la palabra 'si' se denomina *antecedente* y la que sigue a la palabra 'entonces' se denomina *consecuente*.

La siguiente tabla muestra el comportamiento de la conectiva condicional.

A	B	$(A \Rightarrow B)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla 5: Conectiva condicional

Ejemplo de condicional

Ejemplo:

P: "Si me levanto temprano entonces tomaré el tren de las ocho"

donde:

A: "yo me levanto temprano"
B: "yo tomaré el tren de las ocho"

y se representa por: $A \Rightarrow B$

A	B	(A ⇒ B)
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Evaluación:

- Los dos primeros casos de la tabla son situaciones posibles de producirse en la realidad, y en consecuencia lógico su resultado.
- Los casos restantes, son situaciones que se pueden expresar sintácticamente pero que no son tan obvios de comprender o analizar semánticamente. Generalmente no son opciones válidas de la realidad. En consecuencia, la lógica completa la tabla con valores de verdad.
  - No es arbitrario
  - No contradice al lenguaje, lo completa

Ejemplo de Condicional

Ejemplo:

P: "$\underbrace{\text{El seguro pagará}}_{\text{Consecuente}}$ **si** $\underbrace{\text{se produce un incendio}}_{\text{Antecedente}}$"

donde:

A: "El seguro pagará"

B: "Se produce un incendio"

y se representa por: $(B \Rightarrow A)$

Ejemplo:

P: "$\underbrace{\text{El seguro pagará}}_{\text{Antecedente}}$ **sólo si** $\underbrace{\text{se produce un incendio}}_{\text{Consecuente}}$"

y se representa por: $(A \Rightarrow B)$

Más Ejemplos

Ejemplo:

P: "*Cuando hay tormentas, se interrumpen las comunicaciones telegráficas*"

¿Enunciados?

¿Expresión en símbolos?

Más Ejemplos

Ejemplo:

P: "*Va a la Ópera siempre y cuando no sea de Wahner* "

¿Enunciados?

¿Expresión en símbolos?

Ejemplo:

P: "*De salir el sol iremos a la playa*"

¿Enunciados?

¿Expresión en símbolos?

Conectivo Lógico: Bicondicional

Otro tipo de proposición compuesta es el bicondicional, que se forma usualmente en nuestro lenguaje cotidiano con la conectiva "**sí y sólo sí**".

Los componentes del bicondicional reciben el nombre de componente izquierdo y componente derecho.

Como su nombre lo indica, el bicondicional es un condicional doble. **B *sí y sólo sí* C** **($B \Leftrightarrow C$)** equivale al condicional **$B \Rightarrow C$** y a **$B \Leftarrow C$** por lo que el bicondicional resulta equivalente al esquema $((B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B))$.

La siguiente tabla muestra el comportamiento de la conectiva bicondicional.

A	B	$(A \Leftrightarrow B)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejemplo de bicondicional

Ejemplo:

P: "Jugaremos a las cartas sí y sólo sí reunimos cuatro personas"

donde:

A: "Jugaremos a las cartas"

B: "reunimos cuatro personas"

y se representa por: $(A \Leftrightarrow B)$

Evaluación:

- **P** tomará valores de verdad verdadero cuando ambos componentes son verdaderos ó ambos son falsos.
- **P** tomará valores de verdad falso si uno de sus componentes es verdadero y el otro falso.

Otras Conectivas: Disyunción exclusiva

Si se tiene un enunciado compuesto P conformado por dos enunciados, supongamos A y B, unidos por medio del conectivo de la disyunción exclusiva, el enunciado P tomará valores de verdad verdadero **solamente cuando uno de los enunciados** que lo compo-nen sea verdadero, y falso en cualquier otro caso.

La siguiente tabla muestra el comportamiento de la conectiva disyunción exclusiva.

A	B	$(A \oplus B)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 5: Conectiva disyunción exclusiva

Ejemplo de Disyunción exclusiva

Haciendo la asociación con nuestro lenguaje natural, la conectiva de disyunción exclusiva usualmente esta representada por la palabra **´ó´**, donde una de las opciones excluye a la otra alternativa .

Ejemplo:

P: "O estás equivocado o es falsa la noticia que has leído"

donde:

A: "Tu estás equivocado "
B: "es falsa la noticia que has leído"

y se representa por: $(A \oplus B)$

Ejemplo:

P: "*Perú está en América o Europa*"

donde:

A: "Perú está en América"
B: "Perú está en Europa"

y se representa por: $(A \oplus B)$

Más Ejemplos

Ejemplo:

P: “*Elena está viva o está muerta*”

¿Proposiciones?
¿Expresión Simbólica?

Ejemplo:

P: “*David es ingeniero o únicamente es político*”

¿Proposiciones?
¿Expresión Simbólica?

Jerarquía de conectivas

Como se estableció anteriormente, para determinar el valor de verdad de una proposición compuesta, es necesario conocer cuáles son las reglas que se aplican para determinar si la proposición completa es verdadera o falsa.

Asimismo, al tener fórmulas (enunciados) con dos o más conectivas, se deben conocer las reglas de *precedencia* y *asociatividad* de las conectivas para asegurar que la evaluación es correcta.

Para determinar la jerarquía de conectivas, se utilizará el siguiente orden:

$$\neg, \wedge, \vee\ \oplus, \Rightarrow, \Leftrightarrow$$

donde $\neg$ (negación) es el operador con mayor jerarquía en la secuencia y $\Leftrightarrow$ (bicondicional) es el operador con el menor peso.

Nota: Para cambiar la precedencia que tiene asignada por defecto debemos utilizar paréntesis.

Ejemplo

Dada la siguiente fórmula:

$$\neg P \vee Q \wedge R$$

El orden de evaluación es primero $\neg P$, posteriormente $Q \wedge R$ y finalmente se aplica $\vee$ al resultado de ambas evaluaciones.

Utilizando paréntesis sería:

$$((\neg\, P) \vee (Q \wedge R))$$

Al tener una fórmula con la presencia de dos o mas conectivas iguales, el orden de asociatividad siempre es de izquierda a derecha.

Ejemplo:

- El orden de evaluación de $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ es $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R)$.
- El orden de evaluación de $\neg(P \vee Q)$ es primero $P \vee Q$ y luego la negación.

Fórmulas bien formadas

Como se ha explicado, las proposiciones compuestas son agrupaciones de proposiciones simples (átomos) unidos por conectivas lógicas; es importante aclarar que al construir proposiciones, se requiere seguir una serie de reglas que establecen si una fórmula esta bien formada.

De acuerdo a lo anterior, una fórmula bien formada (fbf) es aquella que cumple los siguientes cuatro puntos:

1. Una variable proposicional es una fórmula bien formada, también llamada fórmula atómica.
2. Si **P** es una fórmula bien formada, **¬P** también es una fórmula bien formada.
3. Si **P** y **Q** son fórmulas bien formadas, **(P ∧ Q)**, **(P ∨ Q)**, **(P ⇒ Q), (P ⊕** Q) y **(P ⇔ Q)** son fórmulas bien formadas.
4. Todas las fórmulas bien formadas se obtienen aplicando las reglas 1, 2 y 3.

Ejemplo

- ✓ Las siguientes son fórmulas bien formadas:

$$(P \vee \neg Q)$$

$$((P \vee \neg Q) \Rightarrow S)$$

- ✓ Las siguientes ***no*** son fórmulas bien formadas:

$$\Rightarrow S$$

$$\vee P \neg$$

$$P \neg R$$

Interpretación de fórmulas: Tablas de Verdad

Una interpretación de una fórmula es una asignación de valores de verdad a un conjunto de átomos.

Para una fórmula con dos átomos se tienen cuatro posibles interpretaciones, para una con tres se tienen ocho interpretaciones, y en general para una fórmula con ***n*** átomos se tienen 2^n interpretaciones.

Considerando las condiciones discutidas anteriormente, es posible determinar el valor de verdad a cualquier fórmula de la lógica proposicional.

Valuación de una Fórmula

Definición:

Una **valuación**, es cualquier función v: Form $\to$ B que satisfaga las siguientes condiciones, donde P y Q representan fórmulas bien formadas cualesquiera:

(V1) $v(\neg P) = \neg v(P)$
(V2) $v(P \vee Q) = (v(P) \vee v(Q))$
(V3) $v(P \wedge Q) = (v(P) \wedge v(Q))$
(V4) $v(P \Rightarrow Q) = (v(P) \Rightarrow v(Q))$
(V5) $v(P \Leftrightarrow Q) = (v(P) \Leftrightarrow v(Q))$

Ejemplo

Teniendo que P es **V**, Q es **F**, R es **V** y S es **V**, la interpretación para la fórmula:

$$(\neg (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \wedge S))$$

es:

En general, para evaluar una fórmula, se deben considerar todas sus posibles interpretaciones.

Ejemplo: La evaluación de

$(\neg (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \wedge S))$ es:

P	Q	R	S	$P \Rightarrow Q$	$\neg (P \Rightarrow Q)$	$R \wedge S$	$\neg (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \wedge S)$
V	V	V	V	V	F	V	V
V	V	V	F	V	F	F	V
V	V	F	V	V	F	F	V
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	F	F	V
F	F	F	F	V	F	F	V

De la evaluación de una fórmula, se pueden definir los siguientes conceptos:

- **Tautología o fórmula válida**: Una fbf es una tautología si es verdadera para todas sus posibles interpretaciones. Una tautología también se conoce como una fórmula válida.

  Ej. $(P \vee \neg P)$

- **Contradicción, fórmula inconsistente o fórmula insatisfactible**: Una fbf es una contradicción si es falsa para todas sus posibles interpretaciones. Una contradicción también se conoce como una fórmula inconsistente o una fórmula insatisfactible.

  Ej. $(P \wedge \neg P)$

- **Fórmula consistente o fórmula satisfactible**: Una fbf que al menos tiene una interpretación verdadera se conoce como una fórmula consistente o satisfactible.

  Ej. $(P \vee Q)$

De la evaluación de una fórmula, se pueden definir los siguientes conceptos:

- **Contingencia**: Una fbf es una contingencia si alguna de las combinaciones de los valores de verdad de sus variables se evalúa como verdadero y alguna de las combinaciones de los valores de verdad de sus variables se evalúa como falso.

  Ej. $(P \vee Q)$

- **P <u>implica lógicamente</u> a Q**: (siendo P y Q fbfs) si $(P \Rightarrow Q)$ es una tautología.

- **P <u>es lógicamente equivalente</u> a Q**: (siendo P y Q fbfs) si $(P \Leftrightarrow Q)$ es una tautología.

Fórmulas equivalentes

Al evaluar las fórmulas **($P \Rightarrow Q$)** y **($\neg P \vee Q$)** se observa que todas sus interpretaciones son iguales, por lo que se dice que ambas fórmulas son equivalentes.

Ejemplo: $(P \Rightarrow Q)$ y $(\neg P \vee Q)$ son fórmulas equivalentes:

P	Q	$\neg$ P	$(P \Rightarrow Q)$	$(\neg P \vee Q)$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Tabla 7: Equivalencia de fórmulas

Existen varias equivalencias entre fórmulas de la lógica proposicional, las cuales se conocen como leyes de equivalencia.

Leyes de De Morgan:

$$(\neg(F \vee G)) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$$

$$(\neg (F \wedge G)) \equiv (\neg F \vee \neg G)$$

Formulación de las Frases

Existen algunos “patrones” de conformación de conectivas en castellano que permiten representar formalmente la misma estructura de las frases (modelado de frases).

- $\neg p$:
  - no p
  - es falso que p
- $p \wedge q$:
  - p y q
  - p porque q
  - p, pero q
  - p, por otra parte q
  - ambos, p y q
  - p, sin embargo q
  - p, además de q
- $p \vee q$:
  - p o q
  - bien p o q
  - p a menos que q
  - p o q o ambos
  - al menos p o q
- $p \longrightarrow q$:
  - si p entonces q
  - q si p
  - q necesario para p
  - no p a menos que q
  - si p, q
  - p suficiente para q
  - p sólo si q
- $p \longleftrightarrow q$:
  - p si y sólo si q
  - p necesario y suficiente para q
  - p si y sólamente si q

Circuitos Lógicos

Debido a que una proposición puede ser evaluada y resultar sólo verdadera o falsa, se puede deducir alguna equivalencia con el álgebra booleana, que maneja solamente dos valores (0 y 1).

Las propiedades del cálculo proposicional son equivalentes a las del álgebra desarrollada por Boole (matemático inglés quien propuso los principios básicos del álgebra de Boole en 1854).

En el álgebra booleana, una *proposición* es equivalente a una *variable*, y las *conectivas lógicas* se asocian a *compuertas lógicas*.

Compuertas lógicas

La siguiente figura muestra las compuestas lógicas más representativas de esta álgebra..

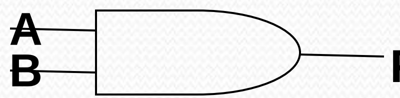
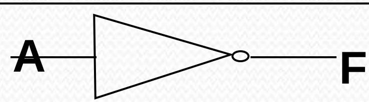
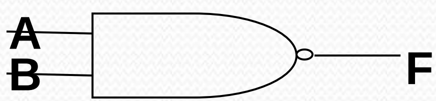
Nombre	Símbolo	Función Algebraica	Tabla Verdad
AND		**F = A * B** **o** **F = AB**	A B | F 0 0 | 0 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 1
OR		**F = A + B**	A B | F 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 1
NOT		$F = \overline{A}$	A | F 0 | 1 1 | 0
NAND		$F = \overline{(A * B)}$	A B | F 0 0 | 1 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 0
NOR		$F = \overline{(A + B)}$	A B | F 0 0 | 1 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 0

Figura 2:
Puertas lógicas básicas

Circuitos

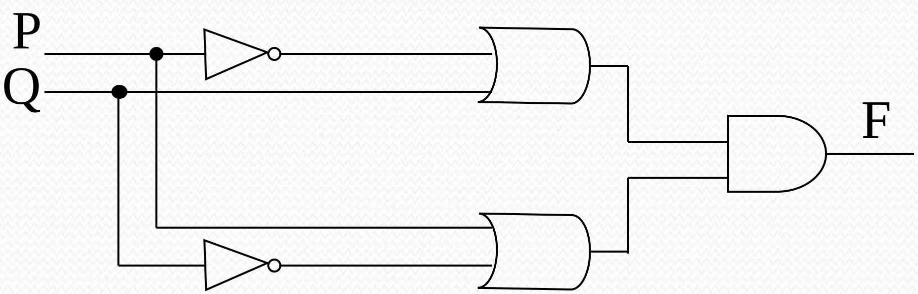
Los esquemas que resultan de aplicar las compuertas lógicas se conocen como circuitos lógicos.

Una fórmula del cálculo proposicional se puede representar gráficamente usando compuertas lógicas.

Como se observa en el siguiente circuito para representar fórmulas con *condicionales* o *bicondicionales* se la debe transformar para eliminarlas.

<u>Ejemplo</u>: La representación en circuito lógico de

$$(\mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{Q}) \equiv ((\neg \mathbf{P} \lor \mathbf{Q}) \land (\neg \mathbf{Q} \lor \mathbf{P}))$$



Lógica digital

La circuitería digital en las computadoras digitales y otros sistemas digitales se diseña y se analiza con el uso del álgebra de Boole.

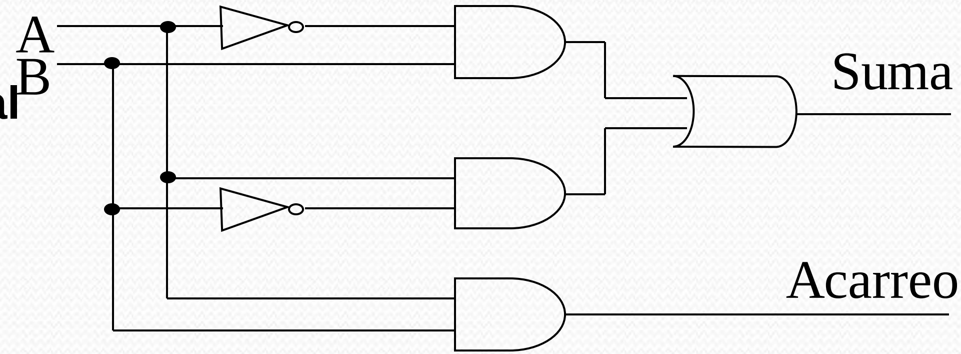
El funcionamiento de las computadoras se basa en la *memorización* y *procesamiento* de datos binarios.

La implementación de la memoria y procesamiento se realiza usando lógica digital y especialmente circuitos *combinacionales* y *secuenciales*.

- **Circuitos combinacionales**: Su salida depende solamente de la combinación de las entradas.

- **Circuitos secuenciales**: Su salida depende de la combinación de las entradas y del estado anterior (estos son los usados en la memoria).

Ejemplo: Circuito Combinacional



Este circuito es una parte componente de la ALU (Unidad Aritmética-Lógica) encargada de las operaciones aritmético-lógicas de la CPU y se denomina <u>Semi-sumador binario de 2 bits</u>.

Analizando las salidas: Suma y Acarreo

$$\text{Suma} = (\overline{A} * B) + (A * \overline{B})$$
$$\text{Acarreo} = (A * B)$$

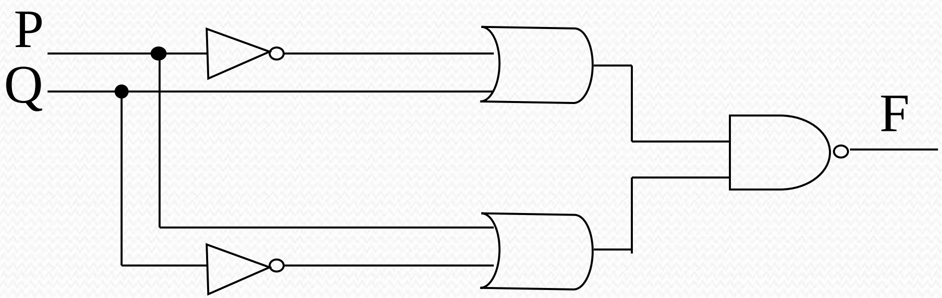
A	B	Suma	Acarreo
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Ejemplo:

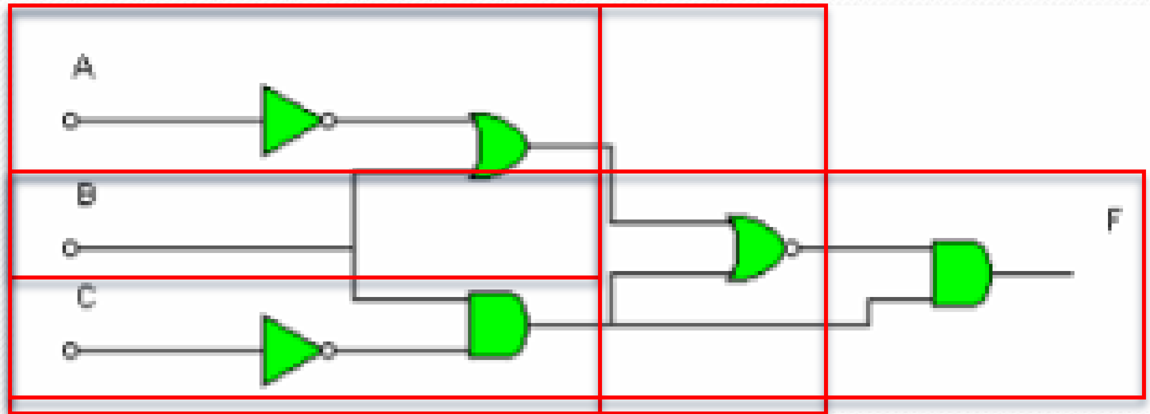
$$(\mathbf{P} \oplus \mathbf{Q}) \equiv$$

$$(\neg(\mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{Q})) \equiv$$

$$(\neg((\neg \mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \wedge (\neg \mathbf{Q} \vee \mathbf{P})))$$



Ejemplo:



$$(\ (\neg \ ((\neg A) \vee B) \ \vee \ (B \wedge (\neg C))) \ \wedge (B \wedge (\neg \ C)) \ \ )$$

Bibliografía:

- *"Lógica Computacional"*, Enrique Paniagua Arís, J.L. Sánchez González, Fernando Martín Rubio, Ed. Thomson. ISBN: 84-9732-182-0.
- *"Organización y Arquitectura de Computadores - Diseño para optimizar prestaciones"* - 4ª. Edición, William Stallings, Prentice Hall. ISBN: 84-89660-24-7
- *"Logica para Matematicos"*, A.G. Hamilton.
- "*Matemática Elemental Moderna - Estructura y método*", Cesar Trejo. Ed. EUDEBA.
- "*Lógica Simbólica y Elementos de Metodología de la Ciencia*". Alicia Salama. Edit. El Ateneo.
- "*Introduction to Mathematical Logic*", Elliot Mendelson, Wadswoth & Brooks Advance Books & Software.
- *Material de estudio de la Cátedra.*